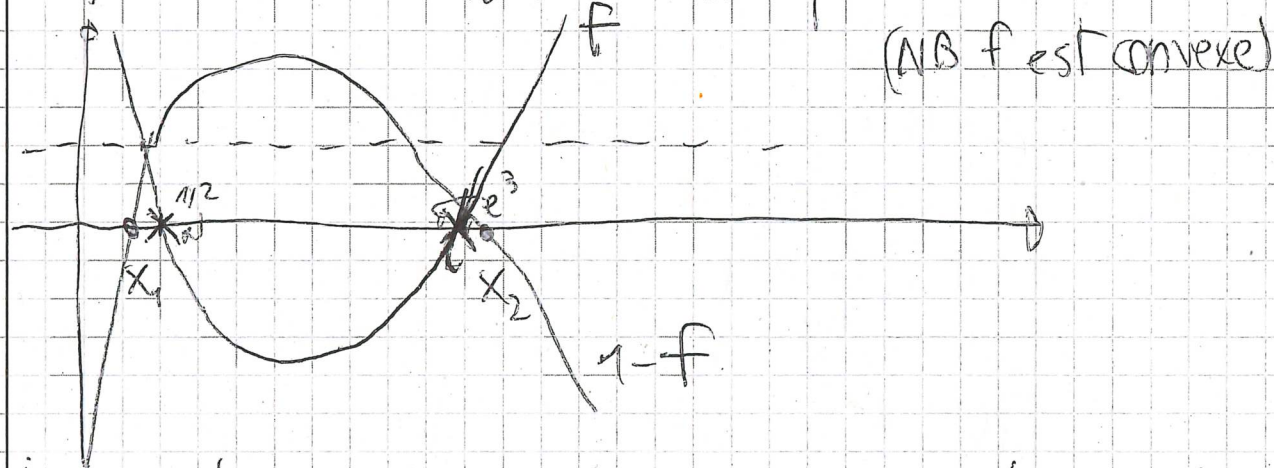


La fonction $x \mapsto f(x)$ est donc strictement croissante sur $]0; \frac{1}{2}[$, décroissante sur $]\frac{1}{2}; e^3[$, et croissante sur $]e^3; +\infty[$.
 (7) La valeur de $\int_a^b |1-f(x)| dx$ est simplement l'aire sous-jacente le graphe de la fonction $x \mapsto |1-f(x)|$. Je ne sais pas ce qui est attendu avec l'expression « représente », mais on peut éliminer facilement la valeur absolue de la façon suivante. Faisons un dessin pour l'illustrer.



La fonction $x \mapsto |1-f(x)|$ est concave et s'annule en deux points $x_1 < x_2$. Alors :

- Si $a < b < x_1$ on a $\int_a^b |1-f(x)| dx = - \int_a^b (1-f(x)) dx$;
- Si $a < x_1 < b < x_2$ on a $\int_a^b |1-f(x)| dx = - \int_a^{x_1} (1-f(x)) dx + \int_{x_1}^b (1-f(x)) dx$.
- Si $a < x_1 < x_2 < b$ on a $\int_a^b |1-f(x)| dx = - \int_a^{x_1} (1-f(x)) dx + \int_{x_1}^{x_2} (1-f(x)) dx - \int_{x_2}^b (1-f(x)) dx$.
- Si $x_1 < a < b < x_2$ on a $\int_a^b |1-f(x)| dx = \int_a^b (1-f(x)) dx$.
- Si $x_1 < a < x_2 < b$ on a $\int_a^b |1-f(x)| dx = \int_a^{x_2} (1-f(x)) dx - \int_{x_2}^b (1-f(x)) dx$.
- Si $x_2 < a < b$ on a $\int_a^b |1-f(x)| dx = - \int_a^b (1-f(x)) dx$.

Cela dit, on peut calculer explicitement la primitive :

$$\int 1-f(x) dx = x - 2 \int \ln(x) dx + 6x + \frac{1}{2} (\ln(x))^2 - 3 \ln(x) + C = -2x \ln(x) + 8x - 3 \ln(x) + \frac{1}{2} (\ln(x))^2 + C.$$


CONCOURS CONTRÔLEUR EXTERNE

ANNÉE 2025

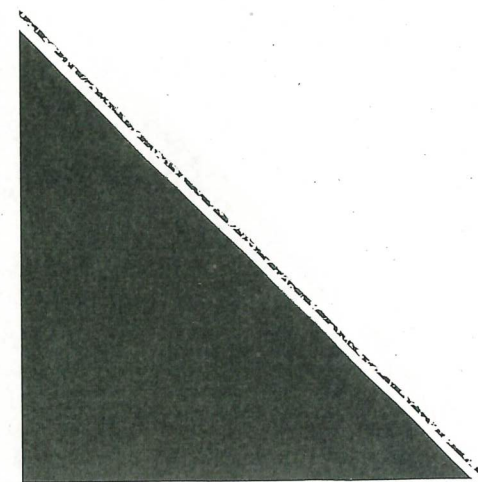
INDIQUEZ VOTRE NUMÉRO DE CANDIDAT

N°

Note :

19,75

N.B : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer la provenance de la copie.



ÉPREUVE

de MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

NOMBRE D'INTERCALAIRES : 2

QCM

1 (a)	2 (c)	3 (b)	4 (d)
5 (b)	6 (b)	7 (a)	8 (b)

Exercice 2.

(1) Par indépendance, c'est le produit des probabilités de réussite de chacun exercice: $0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,3 = 0,144$.

(2) Pour la même raison, c'est le produit des probabilités de faillite de chacun exercice: $(1-0,8) \cdot (1-0,6) \cdot (1-0,3) = 0,056$.

(3) Puisque les événements suivants sont mutuellement exclusifs,

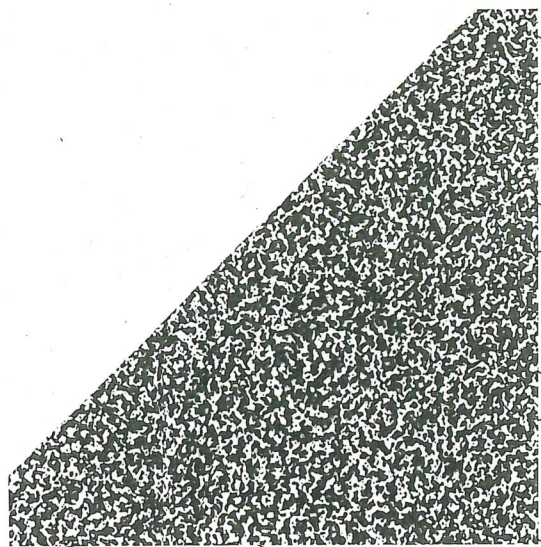
$P(\text{réussir exactement un exercice}) =$

$P(\text{réussir le 1, faillir le 2 et le 3}) +$

$P(\text{réussir le 2, faillir le 1 et le 3}) +$

$P(\text{réussir le 3, faillir le 1 et le 2}) =$

$0,8 \cdot (1-0,6) \cdot (1-0,3) + (1-0,8) \cdot 0,6 \cdot (1-0,3) + (1-0,8) \cdot (1-0,6) \cdot 0,3$
 $= 0,3.$



(4) $P(\text{réussir au moins un exercice}) = 1 - P(\text{ne réussir aucun exercice}) = 1 - 0,056 = 0,944$, d'après le résultat de la question 2.

Exercice 3.

(1) Pour que f soit définie, il est nécessaire et suffisant que $\frac{1}{x}$ et $\ln(x)$ le soient; on trouve respectivement que $x \neq 0$ et $x > 0$, donc en intersectant $Df = \mathbb{R}^+$.

(2) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \frac{1}{x}) = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - 3) = +\infty$, et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - \frac{1}{x}) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x) - 3) = -\infty$, et donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$ (il ne s'agit pas d'une forme indéterminée!).

(3) D'après les règles de dérivation connues on a $f'(x) = (2 - \frac{1}{x})' (\ln(x) - 3) + (2 - \frac{1}{x}) (\ln(x) - 3)' = \frac{1}{x^2} \cdot (\ln(x) - 3) + (2 - \frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln(x) + 2x - 4}{x^2}$.

On remarquera que f est trivialement continue et dérivable sur tout Df .

(4) (a) $V(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

On trouve $V'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0$ pour tout $x > 0$.

(b) On calcule $V(1) = -2 < 0$, $V(2) = \ln(2) > 0$.

Comme $x \mapsto V(x)$ est continue sur l'intervalle $[1; 2]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que V prend la valeur 0 sur $[1; 2]$.

De plus, V est strictement croissante d'après la question (a), donc cette valeur est atteinte en exactement un point $x^* \in [1; 2]$.

(c) Encore une fois, V est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. D'après la question précédente et la continuité de V , on a alors $V(x) \leq 0$ sur $]0; x^*[$, $V(x^*) = 0$, et $V(x) > 0$ sur $]x^*; +\infty[$.

(5) On a $f'(x) = \frac{V(x)}{x^2}$; donc le signe de f' est le même que celui de V . D'après ce qu'on vient de dire, f est alors décroissante sur $]0; x^*[$, atteint son minimum en x^* , et est strictement croissante sur $]x^*; +\infty[$.

(6) D'après le théorème fondamental du calcul intégral, F est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Donc il suffit d'étudier le signe de f . Voir l'étude:

$2 - \frac{1}{x}$	-	+	+	+
$\ln(x) - 3$	-	-	+	+
$F'(x)$	↘	↘	↗	↗

NUMÉRO DE CANDIDAT	ÉPREUVE DE	INTERCALAIRE N°
	MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES	112

Exercice 4.

(1) Il suffit de sommer la hauteur des barres : il y en a $30+25+20+20+20+15+10+10 = 150$.

(2) On calcule : $\frac{1}{150} \sum \text{âges} =$
 $\frac{1}{150} (30 \cdot 9 + 25 \cdot 10 + 20 \cdot 11 + 20 \cdot 12 + 20 \cdot 13 + 15 \cdot 14 + 10 \cdot 15 + 10 \cdot 16)$
 $= \frac{1760}{150} = 11,733... \text{ soit } 11 \text{ ans } 8 \text{ mois et } \sim 24 \text{ jours}$

(3) Comme le nombre total des licenciés est pair, c'est la moyenne entre l'âge du 75^e et du 76^e licencié. On voit facilement que le 75^e a 11 ans et le 76^e en a 12 (ou vice-versa) ; donc l'âge médian est de 11 ans et 6 mois. Autrement dit, si on trie les licenciés par ordre croissant ou décroissant d'âge, la médiane est l'âge du licencié qui se trouve à moitié de la liste, ou la moyenne des deux à moitié s'ils sont en nombre pair.

(4) La médiane est légèrement inférieure à la moyenne : cela veut dire qu'il y a « peu » de licenciés âgés qui remontent la moyenne, ou réciproquement que les « jeunes » sont plus nombreux. Autrement dit, pris un licencié au hasard, il va avoir au plus 11 ans et demi ~~à moitié des fois~~ mais il va avoir en moyenne presque 11 ans et 9 mois.

On pourrait dire quelque chose aussi sur le coefficient de Gini de la distribution, mais c'est un peu poussé.

Exercice 5.

(1) Pour $1 \leq i \leq 750$, soit Y_i la variable aléatoire ~~la probabilité est dans~~ qui vaut 1 si le spectateur i -ième (dans un ordre quelconque) a oublié son sac et 0 sinon. Alors les v.a. $Y_1, Y_2, \dots, Y_{750}$ sont i.i.d. avec loi donnée par $P(Y_i=1) = 0,005 =: p$, $P(Y_i=0) = 1-p$. De plus on a $X = \sum_{i=1}^{750} Y_i$. Celle-ci est par définition une v.a. de Bernoulli. Si on ne prend pas pour bonne cette définition des Bernoulli, on peut aussi calculer aisément $P(X=k) = \binom{750}{k} p^k (1-p)^{750-k}$ et donc X a la même loi qu'une v.a. de Bernoulli.

(2) D'après ce qu'on vient de dire on a $E[Y_i] = p$ pour tout i et $E[X] = \sum_{i=1}^{750} E[Y_i] = 750 \cdot p = 3,75$.

(3) Calculons préliminairement, pour $i \neq j$:

$$E[Y_i] = p, \quad \text{Var}(Y_i) = E[Y_i^2] - E[Y_i]^2 = p - p^2 = p(1-p);$$

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = E[Y_i Y_j] - E[Y_i] E[Y_j] = p^2 - p^2 = 0,$$

car les Y_i sont i.i.d. On trouve donc

$$\text{Var}(X) = \sum \text{Var}(Y_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(Y_i, Y_j) = 750 p(1-p) = 3,73..$$

(4) On s'attend en moyenne à avoir 3,75 sacs oubliés dans la salle. Par ailleurs, le résultat sur la variance nous dit aussi (d'après l'inégalité de Tchebycheff) que X est assez concentrée autour de la moyenne: par exemple on ne va avoir plus de 7,5 sacs que $\approx \frac{1}{3,7}$ des fois, et pas plus de 18 sacs que $\approx \frac{1}{3,8^3}$ des fois.

(5) On calcule: $P(X=0) = P(Y_i=0 \text{ pour tout } i) =$

$$\prod_{i=1}^{750} P(Y_i=0) = P(Y_1=0)^{750} = 0,995^{750} \dots \quad (\text{je n'ai pas de calculatrice})$$

Approximation: $(1 - \frac{1}{200})^{750} = \left[(1 - \frac{1}{200})^{200} \right]^{3,75} \approx \left(\frac{1}{e} \right)^{3,75} \approx \frac{1}{40}$

NUMÉRO DE CANDIDAT	ÉPREUVE DE	INTERCALAIRE N°
	MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES	212

Exercice 6.

(A) Soient G, M, P respectivement les poids d'un pot grand, moyen, petit. La condition sur le poids total nous donne: $G + 8M + 11P = 8,4$.

Par ailleurs, faisant le poids de la première étagère égal à celui de la seconde et celui de la seconde égal à celui de la troisième on a respectivement

$$\begin{cases} G + 2M + P = 4M + 2P \\ 4M + 2P = 2M + 8P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G - 2M - P = 0 \\ 2M - 6P = 0 \end{cases}$$

Il vaut pas la peine d'utiliser des techniques connues, le système est déjà résolu. La deuxième équation nous donne directement $M = 3P$ et, en substituant dans la première, $G = 7P$.

Finalement, la condition sur le poids total devient alors $42P = 8,4$ kg. Conclusion:

$$P = 0,2 \text{ kg}; M = 0,6 \text{ kg}; G = 1,4 \text{ kg}.$$

(B) On fait la substitution $s = \frac{1}{x}$, $t = \frac{1}{y}$ et on obtient le système linéaire du premier degré

$$\begin{cases} 3s + 2t = 5 \\ -2s + t = 2 \end{cases}$$

On pourrait échelonner, mais il ne vaut pas la peine pour un système si petit. On fait plutôt une opération équivalente:

$$2 \cdot (\text{équation 1}) + 3 \cdot (\text{équation 2}) \Rightarrow$$

$$2(3s + 2t) + 3(-2s + t) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 7t \Rightarrow t = \frac{16}{7}$$

et aussi $s = \frac{1}{2}(t - 2) = \frac{1}{7}$. Et donc $\boxed{x = 7, y = \frac{7}{16}}$.

